716. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用 IV.
(Smoluchovsky ノ方程式並ニ Markov ノ聯鎖)

吉田 耕作 (阪大)

前談話 (679) ノ定理ヲ使ツテ Smoluchovsky ノ方程式

(14) $T(t+s)=T(t)T(s) \quad (0<t, s<\infty)$

ヲ取扱ッテミル。始メ筆者ハ Fourier 解析ニヨリ，角谷氏ハ系列 $\left\{T\left(\frac{t}{2^n}\right)\right\}$ ヲ考ヘルコトニヨリ略々同じ結果ヲ得タガ，何レモ積分ノ計算ヲ要スル。其ノ後考ヘ直シテミタラ，次ノ様ニスルノガ手取リ早ク且ッ übersichtlich ノ様デアル。色々御助力ヲ受ケタ角谷氏ニコゝデ感謝シテヲキマス。

次ニハ定理ヲ用ヒテ Markov ノ聯鎖ニ關スル古典的ナ結果ガ擴張シタ形デ得ラレルコトヲ示シタイ。

§8. Smoluchovsky ノ方程式

complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ノ線型 operator

ノ系T(t)ガ(14)ヲ満足スルトスル。コノ解T(t)ニ次ノ二條件ヲ附ケル。

(a) 或ル $t_0>0$ ニ對シ $T=T(t_0)$ ガ定理ノ條件(i), (ii)ヲ満ス。

(b) $T(t)$ ハ t ニ關シテ連續:

$$\lim_{t\to t_1}\|T(t)-T(t_1)\|=0.$$

然ラバ、定理ニ於ケルTノ分解ト類似ノT(t)ノ分解ガ得ラレルコト次ノ如クデアル。

先ヅ定理ニヨリ

$$(※)\begin{cases} T=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i T_i+S,\ |\lambda_i|=1,\ \lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j), \\ T_i^2=T_i,\ T_iT_j=0\ (i\neq j), \\ T_iS=ST_i=0\ \text{且ツ}\ \|S^n\|\leq\dfrac{\beta}{(1+\varepsilon)^n} \\ \qquad\qquad (n=1,2,\cdots\cdots;\ \varepsilon,\beta>0). \end{cases}$$

今 $T_i(t)=T_iT(t)T_i$ トシ、次ノ如ク置ク

$$(15)\quad T(t)=\sum_{i=1}^{k}T_i(t)+S(t).$$

(※)カラ $T_i=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\left(\dfrac{T}{\lambda_i}\right)+\left(\dfrac{T}{\lambda_i}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{T}{\lambda_i}\right)^n\right\}$

ダカラ(14)ニヨリ T_i ハ全テノ $T(t)$ ト commutative:

$T_iT(t)=T(t)T_i$.

故ニ(14), (※)ニヨリ容易ニ

(16) $T_i(t+s) = T_i(t)T_i(s)$

(17) $T_i(t)T_j(s) = 0\ (i \neq j)$.

$T_i(t)S(s) = S(s)T_i(t) = 0$.

(18) $S(s)S(t) = S(t+s)$

ガ得ラレル。次ニ

<u>$S(t)$ ノ評價</u>. (8) カラ $S(t)$ ガ $0<t<\infty$ デ t ニ関シ連続ナコトハ明カ, $S = S(t_0)$ ガ (*) ヲ満スカラ, (18) ニヨリ

(19) $\|S(t)\| \leqq d \exp(-ct);\ c, d > 0,$

$t_0 \leqq t < \infty$

<u>$T_i(t)$ ノ構造</u>. T_i ニヨル $\mathfrak{X}$ ノ像ヲ $\mathfrak{X}_i$ トスルト $T_i^2 = T_i$ ニヨリ $\mathfrak{X}_i$ ノ各点ハ何レモ T_i ニヨリ invariant. T_i ハ vollstetig (<u>定理</u>ニ証明シタ) ダカラ, $\mathfrak{X}_i$ ノ単位球 $\|x\| \leqq 1$ ハ compact。ヨッテ Riesz ノ定理[1] ニヨリ <u>$\mathfrak{X}_i$ ハ有限次元</u>。

$T_i(t) = T_i T(t) T_i$ ハ $\mathfrak{X}_i$ ヲ $\mathfrak{X}_i$ 内ニ寫ス. $T_i^2 = T_i$ ダカラ $T_i(t) = T_i(t)T_i$。ヨッテ $T_i(t) = M_i(t)T_i$ ($M_i(t)$ ハ $\mathfrak{X}_i$ ヲ $\mathfrak{X}_i$ 内ニ寫ス一次寫像即チ有限次元ノ matrix !!) ノ形デアル。$M_i(t)$ ハ勿論 (16), (8) ヲ満足スル ($T_i^2 = T_i$ ニヨル) カラ, $M_i(t_0)$ = 単位行列ニヨリ, $M_i(t)$ ハ $0 \leqq t < \infty$ デ t ニ関シ連続且ツ (16) ヲ満足シ, $M_i(0)$ = 単位行列。

---

(1) S. Banach: Théorie des Opérations Linéaires, p. 83.

ヨッテ[1]、$\| M_i(t) - M_i(0) \| < 1$ for $t_1 \leq 1$ トスルト

$$\begin{cases} M_i(t) = \exp \dfrac{t}{t_1} C = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{t_1} C \right)^n \\ C = \log M(t_1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(M(t_1) - M(0) \right)^n \end{cases}$$

C ノ固有値ヲ $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_e$ トスルト、之カラ

$$M_i(t) \approx \left\| \begin{matrix} \exp(\mu_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\mu_e t) \end{matrix} \right\| \tag{20}$$ (≈ハ同値ノ意味)

然シテ $M_i(t_0)$ ＝単位行列カラ $\mu_s t_0 \equiv 0 \pmod{2\pi i}$.

ヨッテ $T = T(1)$ ノ Eigenraum $\mathfrak{D}_i = T_i \mathfrak{D}$ ガ time t ノ変化ニヨッテ Eigenraum l コニ分レル状態ガワカッタ。

(15) 乃至 (20) 及ビ $T_i(t) = M_i(t) T_i$ ニヨッテ定理ニ相当スルコトガ $T(t)$ ニ関シテ云ヘタワケニナル。

§9. Markov ノ聯鎖 (Chain)

我々ノ談話ノ出発点ハ Fréchet ノ定理（談話 646）デアッタ。之レハ古典的ナ Markov chain ノ議論ヲ函数空間ニ拡張シタモノデアル。Markov chain ノ定義ハ次ノ通リ。

---

1) 作者: 日本数學輯報 13 (1936) p. 24 以下ノ証明ガソノママアテハマル。

有限コノ状態〔1〕,〔2〕,……,〔s〕ガアリ，単位時間ノ後ニ状態〔i〕ガ状態〔j〕ニ移ル遷移確率ガt_{ij}，n単位時間ノ後ニ状態〔i〕ガ状態〔j〕ニ移ル遷移確率$t_{ij}^{(n)}$ガ行列

$$T^n \quad \left(T=(t_{ij}),\quad t_{ij}^{(1)}=t_{ij}\right)$$

ノ$i-j$要素デ與ヘラレル如キ事象ヲMarkov chainト呼ブ．

明ラカニ $\sum_{j=1}^{s} t_{ij}^{(n)}=1,\ t_{ij}^{(n)}\geqq 0$ ダカラ，行列Tハ我々ノ定理ノ條件(i), (ii)ヲ満足スル。筆者ノ調ベタ所デハMarkov chainニ関シテ優レタ敍述ハv. Misesノ書物Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig (1931) p.533―549ニアル。定理ヲ使ヘバ状態全体ガcomplex Banach空間$\mathfrak{L}$ヲ作ル場合ニ，Tノpositivity（$t_{ij}^{(n)}\geqq 0,\ \sum_{j=1}^{s} t_{ij}^{(n)}=1$ニ相當スル）ノ假定ナシニ，v. Misesニ出テヰル事柄ノ中essentialナ部分ガ擴張シタ形デ得ラレルコト次ノ通リデアル。

$\mathfrak{L}$ノ線型operator Tガ定理ノ條件(i), (ii)ヲ満足スルトスレバ定理ニヨリ(米)ガ成立ツ。Eヲ$\mathfrak{L}$ノ単位operatorトスルト$T_0=E-\sum_{i=1}^{k}T_i$ハ(米)ニヨリ$T_0^2=T_0,\ T_0T_i=T_iT_0=0\ (i\geqq 1)$ヲ満ス。即チEハ

互ニ orthogonal ナ idempotent $T_0, T_1, \cdots\cdots, T_k$ ノ直和ニナル。ヨッテ T_i ニヨル $\mathfrak{L}$ ノ像ヲ $\mathfrak{L}_i$ トスルト $\mathfrak{L}$ ハ原点以外ニ互ニ共通点モタヌ $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{L}_k$ ノ直和ニナル。

Mises ニナラッテ $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_i\ (i \geq 1)$ ヲ夫々 keine Zugangs-Wahrscheinlichkeit ノ部分 keine Abgangs-Wahrscheinlichkeit ノ部分ト呼ブ。其ノ理由ハ次ノ通リ：

$x \in \mathfrak{L}_0$ トスルト $T_0^2 = T_0$ ニヨリ $T_0 x = x$. ヨッテ (※) ニヨリ

$$T \cdot x = T \cdot \left(E - \sum_{i=1}^{k} T_i\right) x = S x.$$

同ジク $T^2 \cdot x = S^2 x, \cdots\cdots, T^n \cdot x = S^n x$ ヲ得ル。ヨッテ (※) ニヨリ time ト共ニ幾何級数的ノ速度デ一様ニ $T^n x$ ガ $\mathfrak{L}$ ノ原点 O ニ近ヅク。

$x \in \mathfrak{L}_i\ (i \geq 1)$ トスルト $T_i^2 = T_i$ ニヨリ $T_i x = x$. ヨッテ (※) ニヨリ $T \cdot x = T \cdot T_i \cdot x = \lambda_i x$. 同ジク $T^2 x = \lambda_i^2 x, \cdots\cdots, T^n x = \lambda_i^n x$ ヲ得ル。ヨッテ全テノ時間ニ対シ $T^n x \in \mathfrak{L}_i$. 且ツ $|\lambda_i| = 1$ ニヨリ $T^n x$ ハ時間ニ對シ概週期的 (fast periodic) ニ $\mathfrak{L}_i$ 内ヲウロツク。(1)

以上ノ結果ハ Kryloff-Bogoliouboff ノ Fréchet

---

(1) §8 ノ所論ト同ジク T_i ノ vollstetig ナコトカラ $\mathfrak{L}_i$ ハ有限次元デアル。

定理ニ對スル確率論的解釈（談話678）ト對比シテ頗ット意味ガハッキリスル。ソレ故現代式(?)ニ$\mathfrak{S}_i\ (i\geq 1)$ $\mathfrak{S}_0$ヲ夫々*ergodic*ナ部分，*dissipative*ナ部分ト呼ンダ方ガヨサ相デアル。